SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1998-99

Angelo Cavallucci

ALCUNI RISULTATI RECENTI SUGLI INSIEMI INVARIANTI PER LE INCLUSIONI DIFFERENZIALI

24 giugno 1999

Tecnoprint - Bologna 2000

Riassunto. Vengono esposti alcuni risultati recenti sulle proprietá di invarianza di un sottoinsieme di uno spazio di Hilbert per alcune classi di inclusioni differenziali.

Abstract. We present some recent results on the invariance properties of a subset of a Hilbert space for some classes of differential inclusions.

ALCUNI RISULTATI RECENTI SUGLI INSIEMI INVARIANTI PER LE INCLUSIONI DIFFERENZIALI

ANGELO CAVALLUCCI

Nello spazio di Hilbert X consideriamo il problema

$$(P) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)) \text{ q.d. per } t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

per il quale supponiamo verificata in tutto il seguito la condizione

$$(H1) \qquad \begin{cases} a) \text{ Per una costante } c > 0 \text{ si ha} \\ \quad X \ni x \longrightarrow F(x) \subset c(1 + ||x||)B \subset X, \ F(x) \neq \emptyset; \\ b) \text{ F é superiormente semicontinua (u.s.c.), ossia} \\ \quad \forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : F(x + \delta B) \subset F(x) + \epsilon B, \end{cases}$$

con $B = \{x \in X | \ ||x|| \leq 1\}$.

In seguito sará utilizzata anche la condizione

(H2) Per ogni insieme limitato $E \subset X$ esiste una costante $K \geq 0$ tale che

$$F(x) \subset F(y) + K \parallel x - y \parallel B, \ \forall x, y \in E.$$

Nel caso di $X = R^n$ le proprietá fondamentali di invarianza per il problema (P) sono espresse dai seguenti due teoremi contenuti in [2]

Teorema 1. *Se F ha valori convessi chiusi e verifica la condizione (H1) e se $\emptyset \neq S \subset R^n$ é chiuso, sono equivalenti le condizioni*

a) $$F(x) \cap T_S(x) \neq \emptyset, \ \forall x \in S;$$

b) $$F(x) \cap \bar{co}T_S(x) \neq \emptyset, \ \forall x \in S;$$

c) $$h_F(x, v) \leq 0, \ \forall v \in \hat{N}_S(x), \ \forall x \in S;$$

d) (S, F) *é debolmente invariante.*

Teorema 2. *Se S e F verificano le ipotesi del Teorema 1 e se inoltre vale la condizione (H2), sono equivalenti le affermazioni*

a) $$F(x) \subset T_S^C(x),\ \forall x \in S;$$

b) $$F(x) \subset T_S(x),\ \forall x \in S;$$

c) $$F(x) \subset \bar{co}T_S(x),\ \forall x \in S;$$

d) (S, F) *é fortemente invariante.*

I simboli che compaiono nei due teoremi enunciati hanno il seguente significato, con $x \in S$ chiuso in X e $d_S(y) = \inf\{\| s - y \| \mid s \in S\}$,

$$T_S(x) = \{\lim_{n\to\infty} \frac{s_n - x}{t_n} \mid S \ni s_n \to x, t_n \to 0+\};$$

$$T_S^C(x) = \{v \in X \mid \limsup_{\substack{y\to x\\ t\to 0+}} \frac{d_S(y+tv) - d_S(y)}{t} = 0\};$$

$$h_F(x, v) = \inf\{< y, v > \mid y \in F(x)\};$$

$$H_F(x, v) = \sup\{< y, v > \mid y \in F(x)\};$$

$$\hat{N}_S(x) = \{v \in X \mid \exists \delta > 0 : (x + \delta \| v \| B) \cap S = \{x\}\};$$

poniamo, con $0 \leq \epsilon < 1,\ 0 < T \leq \infty$,

$$T_F^\epsilon(x_0, T) =$$

$$= \{x(\cdot) : [0, T] \cap R \longrightarrow X \mid x(\cdot) \text{ assol. cont.}, \dot{x}(t) \in F(x(t) + \epsilon B)\, q.d.,\ x(0) = x_0\}$$

e diciamo, seguendo [3], che il sistema (S,F) é *debolmente invariante* (viable) se

$$\forall x_0 \in S, \exists x(\cdot) \in T_F^0(x_0, \infty), \forall t \geq 0 : x(t) \in S;$$

debolmente invariante in senso approssimato se

$$\forall \epsilon > 0, \forall T > 0, \forall x_0 \in S, \exists x(\cdot) \in T_F^\epsilon(x_0, T), \forall t \in [0, T] : d_S(x(t)) \leq \epsilon;$$

fortemente invariante se

$$\forall x_0 \in S, \forall x(\cdot) \in T_F^0(x_0, \infty), \forall t \geq 0 : x(t) \in S;$$

fortemente invariante in senso approssimato se

$$\forall \lambda > 0, \forall T > 0, \forall x_0 \in S, \exists \epsilon > 0, \forall x(\cdot) \in T_F^\epsilon(x_0, T), \forall t \in [0, T] : d_S(x(t)) \leq \lambda.$$

Poniamo anche, per $x \in S$ chiuso in X,

$$T_S^w(x) = \{w - \lim_{n\to\infty} \frac{s_n - x}{t_n} \mid S \ni s_n \to x, t_n \to 0+\};$$

$$proj_S^\epsilon(y) = \{s \in S \mid \| y - s \|^2 \leq d_S(y)^2 + \epsilon^2\},\ y \in X,\ \epsilon > 0;$$

$$S^* = \{y \in X \mid \forall s \in S :< y, s > \leq 0\}.$$

Si ha (cfr [1], [3])

$$N_S^w(x)^* = T_S^C(x) \subset T_S(x) \subset T_S^w(x) \subset \bar{co}T_S^w(x) \subset \hat{N}_S(x)^*.$$

In [3] é stata ottenuta la seguente "versione approssimata" del Teorema 1.

Teorema 3. *Supponiamo verificata la condizione (H1). Per ogni $S \subset X$ sono equivalenti le affermazioni*

a) $$\bar{co}F(x) \cap T^w_{\bar{S}}(x) \neq \emptyset, \ \forall x \in \bar{S};$$

b) $$\bar{co}F(x) \cap \bar{co}T^w_{\bar{S}}(x) \neq \emptyset, \ \forall x \in \bar{S};$$

c) $$h_F(x,v) \leq 0, \ \forall v \in \hat{N}_{\bar{S}}(x), \ \forall x \in \bar{S};$$

d) (S,F) *é debolmente invariante in senso approssimato.*

Indichiamo il metodo seguito in [3] per provare che d) segue da c).

Si comincia con l'osservare che (S,F) é debolmente invariante in senso approssimato se e solo se lo é $(\bar{S},F)$. Questo permette di ragionare su un insieme S chiuso. Fissiamo $x_0 \in S, T > 0$. Si determinano due costanti $m, k > 0$ tali che

$$F(x) \subset mB, \ \forall x \in (k+1)B,$$

$$|x(t)| < k \ \text{ per } \ 0 \leq t \leq T,$$

$$\| \dot{x}(t) \| \leq m \text{ q.d. su } [0,T]$$

per ogni $x(\cdot) \in T^\epsilon_F(x_0,T)$. Posto

$$G = \{x \in kB | \ d_S(x) < \frac{1}{2}\},$$

fissiamo una funzione $s_\delta(\cdot)$ tale che

$$G \ni x \longrightarrow s_\delta(x) \in proj_S{}^\delta(x), \ 0 < \delta < \frac{1}{4},$$

$$s_\delta(x) = x \text{ per } x \in S.$$

Poniamo

$$f_\delta(x) = x \text{ per } x \in G \cap S,$$

$$f_\delta(x) = 0 \text{ per } x \notin G.$$

Se $x \in G \backslash S$, segue dalla Proposizione 2.2 di [3] che esistono

$$\bar{s}_\delta(x) \in S, \bar{x}_\delta(x) \notin S$$

tali che

$$\bar{x}_\delta(x) - \bar{s}_\delta(x) \in \hat{N}_S(\bar{s}_\delta(x)),$$

$$\| \bar{x}_\delta(x) - \bar{s}_\delta(x) \| \leq \delta,$$

$$\| [\bar{x}_\delta(x) - \bar{s}_\delta(x)] - [x - s_\delta(x)] \| \leq 2\delta$$

e dall'ipotesi c) segue che esiste

$$f_\delta(x) \in F(\bar{s}_\delta(x))$$

tale che

$$< f_\delta(x), \bar{x}_\delta(x) - \bar{s}_\delta(x) > \leq 2m\delta.$$

Con questa scelta di $f_\delta(x)$ si ha

$$< f_\delta(x), x - s_\delta(x) > \leq 4m\delta,$$
$$\| f_\delta(x) \| \leq m,$$
$$f_\delta(x) \in F(s_\delta(x) + \delta B).$$

Poniamo

$$x(0) = x_0$$
$$x(t) = x(t_{i-1}) + (t - t_{i-1}) f_\delta(x(t_{i-1})) \text{ per } t_{i-1} \leq t \leq t_i, 1 \leq i \leq p,$$

essendo

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = T,$$
$$\delta \leq t_i - t_{i-1} \leq \Delta \text{ per } 1 \leq i \leq p.$$

É possibile determinare $\Delta > \delta$ opportuno in modo da avere

$$x(\cdot) \in T_F^\epsilon(x_0, T),\ d_S(x(t)) \leq \epsilon \text{ per } 0 \leq t \leq T.$$

Esiste una "versione approssimata" anche del Teorema 2 data dal seguente

Teorema 4. *Supponiamo S chiuso in X e che siano verificate le condizioni (H1) e (H2). Allora sono equivalenti le affermazioni*

a) $$F(x) \subset T_S^C(x),\ \forall x \in S;$$

b) $$F(x) \subset T_S(x),\ \forall x \in S;$$

c) $$F(x) \subset T_S^w(x),\ \forall x \in S;$$

d) $$F(x) \subset \bar{co} T_S^w(x),\ \forall x \in S;$$

e) $$H_F(x, v) \leq 0,\ \forall v \in \hat{N}_S(x),\ \forall x \in S;$$

f) (S, F) *é fortemente invariante in senso approssimato.*

Per la dimostrazione rimandiamo a [3].

Per ottenere risultati di "invarianza esatta" dai due teoremi precedenti consideriamo la seguente condizione

(H3) Esiste $K > 0$ tale che per ogni insieme non vuoto limitato $D \subset X$ si ha

$$\alpha(F(D)) \leq K\alpha(D),$$

ove $\alpha(\cdot)$ rappresenta la *misura di non compattezza* secondo Kuratowski:

$$\alpha(D) = \inf\{\delta > 0 |\ D \subset \bigcup_{finita} D_i,\ diam(D_i) \leq \delta\}.$$

Osserviamo che (H3) é conseguenza di (H2).

Teorema 5. *Supponiamo che F verifichi le condizioni (H1) e (H3). Sia*

$$]0,1[\ni \epsilon_n \longrightarrow 0,\ x_n(\cdot) \in T_F^{\epsilon_n}(x_0,T).$$

Allora esiste $x(\cdot) \in T_F^0(x_0,T)$ *tale che, eventualmente passando a una sottosuccessione,*

$$\max_{0\le t\le T} \| x_n(t) - x(t) \| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Questo risultato é contenuto in [3] insieme con i due teoremi che seguono.

Teorema 6. *Supponiamo S chiuso in X e supponiamo che F sia a valori convessi chiusi e che verifichi le condizioni (H1) e (H3).Allora sono equivalenti le affermazioni*

a) $$F(x) \cap T_S(x) \neq \emptyset,\ \forall x \in S;$$

b) $$F(x) \cap \bar{co}T_S(x) \neq \emptyset,\ \forall x \in S;$$

c) $$h_F(x,v) \le 0,\ \forall v \in \hat{N}_S(x),\ \forall x \in S;$$

d) (S,F) *é debolmente invariante.*

Teorema 7. *Supponiamo S chiuso in X, F a valori convessi compatti e che siano verificate le condizioni (H1) e (H2). Allora sono equivalenti le affermazioni*

a) $$F(x) \subset T_S^C(x),\ \forall x \in S;$$

b) $$F(x) \subset T_S(x),\ \forall x \in S;$$

c) $$F(x) \subset T_S^w(x),\ \forall x \in S;$$

d) $$F(x) \subset \bar{co}T_S^w(x),\ \forall x \in S;$$

e) $$H_F(x,v) \le 0,\ \forall v \in \hat{N}_S(x),\ \forall x \in S;$$

f) (S,F) *é fortemente invariante .*

Un altro tipo di invarianza debole approssimata viene considerato in [4], dove si prende come misura dell'approssimazione il minimo tempo trascorso fuori dall'insieme S da una qualunque traiettoria uscente da $x \in S$.

D'ora in poi sará sempre $X = R^n$ e sará sempre verificata la seguente condizione

(H4) F ha valori compatti convessi e verifica (H1).

Riportiamo da [4] le seguenti definizioni, ove $x \in R^n$, S é chiuso in R^n, $0 \leq T < \infty$,

$$C_{S,F}(x) = \inf_{x(\cdot)\in T_F^0(x,\infty)} \mu(\{t \geq 0 |\ x(t) \notin S\}) =$$

$$= \inf_{x(\cdot)\in T_F^0(x,\infty)} \int_0^\infty \chi_{S'}(x(s))\, ds;$$

$$V_F(T,S) = \{x \in R^n |\ C_{S,F}(x) \leq T\};$$

$$Viab_F(S) = \{x \in S |\ \exists x(\cdot) \in T_F^0(x,\infty) : x(t) \in S \text{ per } t \geq 0\};$$

$$\theta_F^S(x) = \inf_{x(\cdot)\in T_F^0(x,\infty)} \{t \geq 0 |\ x(t) \in S\}.$$

Poniamo anche

$$\tilde{\chi}_{S'}(x) = \begin{cases} [0,1] \text{ se } x \in \partial S, \\ \{1\} \text{ se } x \in S', \\ \{0\} \text{ altrove in } R^n, \end{cases}$$

$$\tilde{F}(x,y) = \{(u,v) \in R^n \times R |\ u \in F(x), v \in -\tilde{\chi}_{S'}(x)\}.$$

La funzione F verifica la condizione (H4) e si ha il seguente

Teorema 8. *Se S é chiuso in R^n e F verifica la condizione (H4), allora*

a) $$C_{S,F}(x) < \infty \Longrightarrow \exists x^*(\cdot) \in T_F^0(x,\infty) : C_{S,F}(x) = \int_0^\infty \chi_{S'}(x^*(s))\, ds;$$

b) $$epi(C_{S,F}) = Viab_{\tilde{F}}(R^n \times [0,+\infty[).$$

Si é posto per $g : R^n \longrightarrow R \cup \{+\infty\}$

$$epi(g) = \{(x,t) \in R^n \times R |\ g(x) \leq t\}$$

In [4] é provato il Teorema 8 e anche il piú generale

Teorema 9. *Se S e Q sono chiusi in R^n e F verifica la condizione (H4), allora*

a) $$C_{S,F}^Q(x) := \inf_{\substack{x(\cdot)\in T_F^0(x,\infty) \\ x(t)\in Q \text{ per } t\geq 0}} \int_0^\infty \chi_{S'}(x(s))\, ds = \textit{minimo};$$

b) $$epi(C_{S,F}^Q) = Viab_{\tilde{F}}(Q \times [0,+\infty[).$$

Dal Teorema 8 segue che

$$Viab_F(S) = V_F(0,S).$$

Si ha anche

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \Longrightarrow V_F(t_1,S) \subset V_F(t_2,S),$$

$$S_1 \subset S_2 \Longrightarrow V_F(t,S_1) \subset V_F(t,S_2),$$

$$V_F(t,S) = \operatorname*{Lim}_{h\to 0+} V_F(t+h,S),$$

dove "Lim" rappresenta il limite secondo Painlevé-Kuratowski, definito, per la multifunzione $h \longrightarrow E(h)$, come il valore comune dei due seguenti limiti, quando coincidono,

$$\operatorname*{Limsup}_{h\to 0+} E(h) = \{x \in R^n |\ \liminf_{h\to 0+} d_{E(h)}(x) = 0\},$$

$$\operatorname*{Liminf}_{h\to 0+} E(h) = \{x \in R^n |\ \limsup_{h\to 0+} d_{E(h)}(x) = 0\}.$$

Posto

$$\hat{F}(x,t) = \{(u,v) \in R^n \times R |\ u \in F(x), v \in \tilde{\chi}_{S'}\}(x),$$

$\hat{F}$ verifica la condizione (H4) e si ha il seguente

Teorema 10. *Sia $T \geq 0$, S chiuso in R^n e supponiamo che F verifichi la condizione (H4). Allora*

$$V_F(T,S) = \pi_{R^n}(Viab_{\hat{F}}(R^n \times [0,T]))$$

Qui π_{R^n} rappresenta la proiezione su R^n.

Si ha anche il seguente

Teorema 11. *Sotto le ipotesi del Teorema 10 e la ulteriore ipotesi*

$$(S,F) \text{ é debolmente invariante},$$

si ha

$$\theta_F^S(x) = C_{S,F}(x),\ \forall x \in R^n;$$

$$V_F(T,S) = \{x \in R^n |\ \theta_F^S(x) \leq T\}.$$

Le dimostrazioni dei teoremi 10 e 11 sono contenute in [4].

Il Teorema 8 e il Teorema 10 permettono di ricondurre la determinazione della funzione $C_{S,F}$ alla determinazione del nucleo di viabilitá $Viab_{\tilde{F}}$ per funzioni $\tilde{F}$ che verificano la condizione (H4).

In [4] é indicato un metodo di approssimazione per $Viab_{\tilde{F}}$ di tipo costruttivo. Sia S chiuso in R^n e sia semicontinua superiormente la multifunzione G tale che

$$R^n \ni x \longrightarrow G(x) \neq \emptyset \text{ compatto } \subset R^n.$$

Posto

$$\overrightarrow{T}_G = \{x : \longrightarrow R^n |\ x(0) = x, x(i+1) \in G(x(i)) \text{ per } i \geq 0\},$$

$$\overrightarrow{Viab}_G(S) = \{x \in S |\ \exists x(\cdot) \in \overrightarrow{T}_G(x) : x(i) \in S \text{ per } i \geq 0\},$$

$$S^0 = S,\ S^{n+1} = \{x \in S^n |\ G(x) \cap S^n \neq \emptyset\},$$

si ha (cfr.[4], Prop.6.1)

$$\overrightarrow{Viab}_G(S) = \bigcap_{n=0}^{\infty} S^n.$$

Sia ora, con $0 < \rho$, M, K,

$$\Gamma(x,\rho) = \begin{cases} [0,1] \text{ se } d_{\partial S}(x) \leq M\rho, \\ \{0\} \text{ se } d_{S'}(x) > M\rho, \\ \{1\} \text{ se } d_S(x) > M\rho, \end{cases}$$

$$\tilde{F}_\rho(x,y) = \{(u,v) \in R^n \times R |\ u \in x + \rho F(x) + \frac{1}{2}MK\rho^2 B,\ v \in t - \rho\Gamma(x,\rho)\}.$$

Allora si ha il seguente

Teorema 12. *Se S é chiuso in R^n e F verifica la condizione (H4) e le seguenti, con le costanti M e K usate sopra,*

$$F(x) \subset F(y) + K \parallel x - y \parallel B \text{ per } x, y \in R^n,$$

$$F(x) \subset MB \text{ per } x \in R^n.$$

Allora si ha

$$epi(C_{S,F}) = \underset{\rho \longrightarrow 0+}{Lim} \overrightarrow{Viab}_{\bar{F}_\rho}(R^n \times [0, +\infty[).$$

Per la dimostrazione rimandiamo a [4].

Vari risultati su invarianza e approssimazione per inclusioni differenziali del tipo

$$\dot{x} \in F(x), \ x \in R^n$$

si trovano in [3']. Qui ci limitiamo a riportare i seguenti

Teorema 13. *Supponiamo che valgano le condizioni (H1), (H2) con $E = R^n$, che F sia a valori convessi compatti e che*

$$S = \overline{int(S)}.$$

Allora sono equivalenti le affermazioni

a) (S, F) *é fortemente invariante* ;

b) $(\overline{S'}, -F)$ *é fortemente invariante* .

Teorema 14. *Supponiamo che valga la condizione (H1), che F sia a valori compatti convessi e inferiormente semicontinua, ossia*

$$\forall x \in R^n, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in R^n : \parallel x - y \parallel \leq \delta \Longrightarrow F(x) \subset F(y) + \epsilon B.$$

Se riesce inoltre

$$\hat{N}_S(x) \neq \{0\}, \ \forall x \in \partial S,$$

$$(S, F) \text{ debolmente invariante},$$

allora

$$(\overline{S'}, -F) \text{ é debolmente invariante}.$$

BIBLIOGRAFIA

1. J. M. Borwein, H.M. Strojwas, *Proximal analysis and boundaries of closed sets in Banach spaces, part I: theory*, Can. J. Math. **38, 2** (1986), 431–52.
2. F.H. Clarke, Y.S. Ledyaev, R.S. Stern, P.R. Wolenski, *Qualitative properties of trajectories of control systems: a survey*, J. Dyn. Control Sys. **1, 1** (1995), 1–48.
3. F.H. Clarke, Y.S. Ledyaev, M.L. Radulescu, *Approximate invariance and differential inclusions in Hilbert spaces*, J. Dyn. Control Sys. **3, 4** (1997), 493–518.

3'. F.H. Clarke, Y.S. Ledyaev, R.S. Stern, *Complements, approximations, smoothings and invariance properties*, J. Conv. Anal. **4, 2** (1997), 189–219.

4. L. Doyen, P. Saint-Pierre, *Scale of viability and minimal time of crisis*, Set-Valued Anal. **5** (1997), 227–46.
5. M. Quincampoix, P. Saint-Pierre, *An algorithm for viability kernels in hölderian case: approximation by discrete dynamical systems*, J. Math. Syst. Est. Contr. **8, 1** (1998), 17–29.
6. M.L. Radulescu, F.H. Clarke, *Geometric approximation of proximal normals*, J. Conv. Anal. **4, 2** (1997), 373–79.
7. P. Saint-Pierre, *Approximation of the viability kernel*, Appl. Math. Optim. **29** (1994), 187–209.